Ας είναι E ένα μη κενό σύνολο και $\{N_\alpha\}_{\alpha\in E}$ μία συλλογή υποσυνόλων του $P(E)$ τέτοια ώστε να ισχύουν τα εξής, για κάθε $\alpha\in E$: (1)

(1) $N_\alpha \neq \emptyset$

(2) $(\forall N\in N_\alpha)\ \alpha\in N$

(3) $(\forall N\in N_\alpha)(\forall M\in P(E))\ N\subseteq M \Rightarrow M\in N_\alpha$

(4) $(\forall N\in N_\alpha)(\forall M\in N_\alpha)\ N\cap M\in N_\alpha$

(5) $(\forall N\in N_\alpha)(\exists M\in N_\alpha)(\forall x\in M)\ N\in N_x$

Υπάρχει μοναδική τοπολογία στο E τέτοια ώστε να ισχύει ότι, για κάθε $x\in E$, το σύστημα περιοχών του x ως προς αυτήν την τοπολογία είναι ίσο με το N_x.

Αν υπάρχει τέτοια τοπολογία, τότε τυχόν $A\in P(E)$ είναι ανοιχτό ως προς αυτήν αν και μόνο αν $(\forall x\in A)\ A\in N_x$, δηλαδή αν και μόνο αν το A είναι περιοχή κάθε σημείου του. Ώστε, αν υπάρχει τέτοια τοπολογία, αυτή μπορεί να είναι μόνον η συλλογή $T=\{A\in P(E)\mid (\forall x\in A)\ A\in N_x\}$.

Για αρχή θα δείξουμε ότι η T είναι όντως τοπολογία στο

Σ. Ε

Ισχύει ότι, $\phi \in P(\Sigma)$ και $(\forall x \in \phi)\ \phi \in N_x$, άρα $\phi \in T$.

Ας είναι $x \in E$. Από την (1) προκύπτει ότι $(\exists N \in P(E))\ N \in N_x$. Από την (3) προκύπτει ότι $E \in N_x$, διότι $E \in P(E)$, $N \in N_x$ και $N \subseteq E$. Λόγω της γενικότητας της θεώρησης του x, μόλις δείξαμε ότι $(\forall x \in E)\ E \in N_x$, άρα $E \in T$.

Ας είναι $A, B \in T$.

Ισχύει ότι $(\forall x \in A \cap B)(x \in A$ και $x \in B) \xRightarrow[B \in T]{A \in T} (A \in N_x$ και

$B \in N_x) \xRightarrow{(4)} A \cap B \in N_x$. Αυτό σημαίνει ότι $A \cap B \in T$.

Λόγω της γενικότητας της θεώρησης των A και B, μόλις δείξαμε ότι η τομή δύο τυχόντων στοιχείων της T είναι στοιχείο της T.

Ας είναι $\{A_i\}_{i \in I}$ μία συλλογή στοιχείων της T.

Ισχύει ότι, $\left(\forall x \in \bigcup_{i \in I} A_i\right)\left((\exists j \in I)\ x \in A_j\right) \xRightarrow{A_j \in T} A_j \in N_x \Rightarrow$

$\overset{3)}{\Longrightarrow}$ $\bigcup_{i\in I} A_i \in N_x$, άρα $\bigcup_{i\in I} A_i \in T$. Μόλις δείξαμε ότι
$A_j \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$

η ένωση τυχούσας υποσυλλογής της T είναι στοιχείο της T.

Ετσι, έχουμε αποδείξει ότι η T είναι τοπολογία στο E.

Τώρα θα αποδείξουμε ότι $(\forall x\in E)\, \mathcal{N}_x = N_x$, όπου με $\mathcal{N}_x$ συμβολίζουμε το σύστημα περιοχών του x ως προς την T.

Ας είναι $x\in E$.

Ας είναι $N\in \mathcal{N}_x$. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει $A\in T$ τέτοιο ώστε $x\in A$ και $A\subseteq N$. Από τις $A\in T$ και $x\in A$ προκύπτει ότι $A\in N_x$. Λόγω των (3), $A\in N_x$ και $A\subseteq N$, έχουμε το συμπέρασμα $N\in N_x$..

Μόλις δείξαμε ότι $(\forall N\in \mathcal{N}_x)\, N\in N_x$, δηλαδή $\mathcal{N}_x \subseteq N_x$.

Ας είναι $N\in N_x$. Προκειμένου να δειχθεί ότι $N\in \mathcal{N}_x$, αρκεί να αποδείξουμε ότι $(\exists A\in T)(x\in A$ και $A\subseteq N)$.

Θεωρούμε το $A=\{\alpha\in E \mid N\in N_\alpha\}$.

Ισχύει ότι $x\in A$, αφού $N\in N_x$.

Επί πλέον, $(\forall \alpha\in A)\, N\in N_\alpha \overset{(2)}{\Longrightarrow} \alpha\in N$, δηλαδή $A\subseteq N$.

ίς είναι $\alpha \in A$. Αυτό σημαίνει ότι $N \in N_\alpha$. Από την (5) προκ- (4)
ύπτει ότι υπάρχει $M \in N_\alpha$ τέτοιο ώστε $(\forall y \in M)\, N \in N_y$, άρα $y \in A$, δηλαδή $M \subseteq A$. Από την (3) προκύπτει ότι $A \in N_\alpha$. Λόγω της γενικότητας της θεώρησης του α, δείξαμε ότι

$(\forall \alpha \in A)\, A \in N_\alpha$, δηλαδή $A \in T$.

Μόλις δείξαμε ότι $N \in \mathcal{N}_x$.

Λόγω της γενικότητας της θεώρησης του N, δείξαμε ότι

$(\forall N \in N_x)\, N \in \mathcal{N}_x$, δηλαδή $N_x \subseteq \mathcal{N}_x$.

Τελικά έχουμε ότι $\mathcal{N}_x = N_x$.

Λόγω της γενικότητας της θεώρησης του x, δείξαμε ότι

$(\forall x \in E)\, \mathcal{N}_x = N_x$.